23/04/2018

$F:[\alpha,b]\to\mathbb{R}$ φραγμένη

$(P_n)_n$ $L(f,P_n)\to I$ $U(f,P_n)$

$\Rightarrow \exists \int_a^b f = I$

Τεχνική: Δίνεται $f:[\alpha,b]\to\mathbb{R}$ ολοκληρώνουμε

Εφαρμόζουμε $\varepsilon = 1/n$, $n\in\mathbb{N} \Rightarrow \forall n\ \exists P_n \mid 0\le U(f,P_n)$

$-L(f,P_n) < \frac{1}{n} \to 0$

$L(f,P_n)\le U(f,P_n)$

(Q_n) αν ισχύει

$Q_{n+1}\supseteq Q_n$ $Q_n = P_1\cup \ \cup P_n$ $n\in\mathbb{N}$

$L(f,Q_n)\le L(f,Q_{n+1})\le U(f,Q_{n+1})\le U(f,Q_n)\le U(f,P_n)$

$Q_1 = P_1$, $Q_2 = P_1\cup P_2$, $Q_3 = P_1\cup P_2\cup P_3$.

$L(f,P_n)\le L(f,Q_n)\le U(f,Q_n)\le U(f,P_n)$

για $Q_{k+1}\supseteq Q_k$

$\Rightarrow U(f,Q_n) - L(f,Q_n)\to 0$

$\to L(f,Q_n)\to I_1$

$\to U(f,Q_n)\to I_2$

$I_1 - I_2 \to U(f,Q_n)\to I$

$\int_a^b f = I$

Πρόταση $f:[\alpha,b]\to\mathbb{R}$ $f(x)=c$ $\forall x\in[\alpha,b]$

$\Rightarrow f$ ολοκλ. και $\int_a^b f = c\cdot(b-a)$

Έστω $P=\{\alpha = x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b\}$

$m_k = \inf\{f(x): x\in[x_k, x_{k+1}]\} = c$

$M_k = \sup\{ \dots \} = c$

$L=(f,P) = \sum_{k=0}^{n-1} M_k (x_{k+1} - x_k) = c \sum_{k=0}^{n-1} (x_{k+1} - x_k) - c(b-a) = U(f,P)$

$\Rightarrow \forall P$ διαμ. $U(f,P) - L(f,P) = 0 \Rightarrow f$ R-ολοκλ.

$\int_a^b f = \underline{\int_a^b} f = \sup\{L(f,P)\} = c(b-a) = \int_a^b f$

Προτ.

$f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ ολοκλ.

$\Rightarrow f+g$ ολοκλ. $\int_a^b (f+g) = \int_a^b f + \int_a^b g$

Θεωρούμε διαμ. $P = \{ x_0 = a < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b \}$

$m_k = \inf\{ (f+g)(x) \quad x \in [x_k, x_{k+1}] \}$ ③ ,

$M_k = \sup\{ \dots \}$ ③'

$m_k' = \inf\{ f(x) : x \in [x_k, x_{k+1}] \}$ ①

$M_k' = \sup\{ \dots \quad \dots \}$ ①'

$m_k'' = \inf\{ g(x) : x \in [x_k, x_{k+1}] \}$ ②

$M_k'' = \sup\{ \dots \quad \dots \}$ ②'

① $\Rightarrow f(x) \geq m_k' \quad \forall x \in [x_k, x_{k+1}]$

② $\quad g(x) \geq m_k''$, $\forall x \in [\dots]$

$\Rightarrow (f+g)(x) \geq m_k' + m_k'' \quad \forall x \in [x_k, x_{k+1}]$

$m_k \geq m_k' + m_k''$

①', ②', ③' $\Rightarrow M_k \leq M_k' + M_k''$

$L(f+g) = \sum m_k (x_{k+1} - x_k) \geq \sum_k (m_k' + M_k')(x_{k+1} - x_k)$

$= L(f,P) + L(g,P)$

Παρόμοια $U(f+g, P) \leq U(f, P) + U(g, P)$

$\forall P$ $L(f,P) + L(g,P) \leq L(f+g, P) \leq U(f+g, P) \leq U(f,P) + U(g,P)$

~~f, g: ολοκλ.~~ $\Rightarrow \exists (P_n)_n : U(f, P_n) \downarrow \int_a^b f \nwarrow L(f, P_n)$ (4)

g ολοκλ. $\Rightarrow \exists (P_n') : U(g, P_n') \downarrow \int_a^b g \nwarrow L(g, P_n')$ (5)

$P_{n+1} \geq P_n$

$P_{n+1}' \geq P_n'$

$Q_n = P_n \cup P_n'$ $L(f, Q_n)$

(4) $L(f, P_n) \leq L(f, Q_n) \nearrow \leq \int_a^b f \leq \downarrow U(f, Q_n) \leq U(f, P_n)$

(5) $L(g, P_n') \leq L(g, Q_n) \nearrow \leq \int_a^b g \leq U(g, Q_n) \leq U(g, P_n)$

$L(f, Q_n) + L(g, Q_n) \leq L(f+g, Q_n) \leq \int_a^b (f+g) \leq U(f+g, Q_n)$

$\leq U(f, Q_n) + U(g, Q_n)$

$\Rightarrow$ 1) $U(f+g, Q_n) - L(f+g, Q_n) \to 0$

$\Rightarrow \exists \int_a^b f+g$

$\Rightarrow \exists \int_a^b (f+g) = \int_a^b f + \int_a^b g$

Θεώρημα: $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ συνεχής $\Rightarrow$ f ολοκλ. (κατά Reimann)

Αποδ: Θα χρησ. το κρ. Reimann. Αρκεί αν $\varepsilon > 0$ τυχαίο

$\to \exists P_\varepsilon$ διαμ. του $[a, b] : U(f, P) - L(f, P) < \varepsilon$

$0 < U(f, P) - L(f, P) = \sum_k (M_k - m_k)(x_{k+1} - x_k)$

για την τυχ. διαμ. $P = \{x_0, \ldots, x_n = b\}$ $k \in \mathbb{N}$

$P_n = \{a = x_0 < x_1 = a + \frac{b-a}{n} < x_2 = a + 2\frac{b-a}{n} < \ldots < x_{n-1}$

$= a + (n-1)\frac{b-a}{n} - b\}$

$M_k - m_k < \frac{\varepsilon}{b-a}$ $\quad f:[a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχ $\Rightarrow$?

f ομοιομ. συνεχ. $\Rightarrow \exists \delta > 0$:

$\forall x,y \in [a,b] : (x-y) < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{b-a}$

$\delta > 0$ το έχουμε βρεί. Διαλέγουμε $n \in \mathbb{N}$ $\quad \frac{b-a}{n} < \delta$

$P_n = \{x_0 = a < \dots < x_n = b\}$ τ.ω. $(x_{k+1} - x_k) = \frac{b-a}{n} < \delta$

$[x_k, x_{k+1}] \to x,y \; \forall \; |f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{b-a}$

διότι $|x-y| < x_{k+1} - x_k = \frac{b-a}{n} < \delta$

$M_k = f(z_k) \quad m_k = f(w_k) \quad z_k, w_k \in [x_k, x_{k+1}]$

$\Rightarrow U(f,P) - L(f,P) < \frac{\varepsilon}{b-a}(b-a) = \varepsilon$

Ασκ.) Βρείτε μια $f:[0,1] \to \mathbb{R}$ ώστε $|f|$ R-ολοκλ. ενώ f όχι R-ολοκλ.

$f(x) = 1 \quad x \in \mathbb{Q} \cap (0,1]$

$= 0 \quad x \in (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cap (0,1]$

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \cap [0,1] \\ -1, & x \in (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cap [0,1] \end{cases}$$

Έστω P τυχαία διαμ. $P = \{x_0 = a < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b\}$

$L(f,P) = \sum_k m_k (x_{k+1} - x_k) = (-1) \sum x_{k+1} - x_k = -(1) \cdot 1 =$ $\quad |f| = 1$

$U(h,P) = 1 \; \forall P \} \to f(x)$ R-ολοκλ. (κρ. Riemann)

Ασκ. Δίνεται $f[0,1] \to \mathbb{R}$ ώστε $\forall b \in (0,1]$ $f/[b,1]$ να είναι R-ολοκλ. Δ.ο. f-ολοκλ. στο $[0,1]$

Αποδ. Έστω $\epsilon > 0$, Ψάχνουμε P_ε διαμέρ. ώστε

$U(f,P_\varepsilon) - L(f,P_\epsilon) < \epsilon$

Έστω $A>0$ $|f(x)| \leq A$ $\forall x \in [0,1]$

Διαλέγ. $b \in (0,1]$: $2Ab < \frac{\epsilon}{2}$

$f/[b,1]$ ολοκλ. $\Rightarrow \exists P_1 - \{b = x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = 1\}$ διαμερ. του $[b,1]$:

$U(f,P_1) - L(f,P_1) < \frac{\epsilon}{2}$ $P = P_1 \cup \{0\} = \{0 = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = 1\}$.

$U(f,P) - L(f,P) = \sum_{k=0}^{n-1} (M_k - m_k)(x_{k+1} - x_k) = \sum_{k=0}^{n-1} (M_k - m_k)$

$(x_{k-1} - x_n) + (M_0 - m_0)b < \frac{\epsilon}{2} + 2Ab < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$

Ασκ 2) $f[0,1] \to \mathbb{R}$-ολοκλ.

$f(x) = \begin{cases} -x+1, & x \in (0,1] \\ \frac{1}{2}, & x = 0 \end{cases}$

$\sup\{f(x)\ x \in [0,1]\} = \sup([0,1]) = 1$

$0 \leq f(x) < 1$, $\exists \max\{f(x) : x \in [0,1]\}$

f άνω φραγμένη από το 1.

$\forall b \in (0,1]$ $f/[b,1]$ είναι συνεχής $=$ f ολοκλ. στο $[b,1]$ $\forall b>0$

$f(x) = 1$ $x \in (0,1)$

$f(x) = 0$ $x = 0$ ή $x = 1$

Έστω $c \leq 1$ θ.δ.ο. f ολοκλ. στο $[0,c]$ $\forall 0 \leq c < 1$.

Εφοσον $\forall\ a \leq c$ η f ολοκλ. στο $[a, c] \Rightarrow f$ ολοκλ. στο $[0, c]$ απο ασκ 1 f ολοκλ. στο $[0, 1]$.

$\boxed{\text{Άσκ}}$ $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right), x \in (0, 1]$

$= \frac{1}{2}, x = 0$

$\left.\right\}$ $f/[b, 1]$ συνx $\Rightarrow$ f ολοκλ. στο $[b, 1]$ $\forall b \in (0, 1]$ $\Rightarrow$ f R-ολοκλ. στο $(0, 1]$

$\boxed{\text{Άσκ}}$ P: $(\alpha, b) \to$ φραγμένη ώστε να $\exists$ P διαμ. ώστε $U(f, P) = L(f, P) \Rightarrow f =$ σταθ.

$$U(f, P) = \sum_{k=0}^{n-1} M_k (x_{k+1} - x_k)$$

$$L(f, P) = \sum_{k=0}^{n-1} m_k (x_{k+1} - x_k)$$

$$0 = U(f, P) - L(f, P) = \sum_{k=0}^{n-1} (\underbrace{M_k - m_k}_{\geq 0})(\underbrace{x_{k+1} - x_k}_{> 0}) = 0$$

$\Rightarrow \forall k \in \{0, 1, \dots, n-1\} : M_k - m_k = 0$
$m_k = \inf\{f(x) : x \in (x_k, x_{k+1})\}$
$M_k = \sup\{\dots\}$
$\left.\right\}$ $\forall k \, \exists c_k : f([x_k, x_{k+1}]) = c_k$

$\Rightarrow f(x_{k+1}) = c_k$
$f(x_{k+2}) = c_{k+1}$

$\to c_k = c_{k+1} = c \quad \forall k$
$\Rightarrow f = c$